***Definizione base ammissibile****:*

Ponendo che la soluzione di un sistema Ax=b sia x= =

La soluzione base (e, per estensione, la base B stessa) si dice soluzione base ammissibile, o SBA , se xB=B-1b≥0.

***Definizione vertice****:*

-Un punto x di un poliedro P si dice punto di estremo o vertice di P se non può essere espresso come una combinazione convessa stretta di altri due punti del poliedro, cioè non esistono y.z ϵ P, y≠z e λϵ(0,1) tali che x=λy+(1-λ)z.

-Un punto x ϵ P è un vertice del poliedro non vuoto P: ={x≥0 : Ax=b} se e solo se x è una soluzione base ammissibile del sistema Ax=b.

Dimostrazione: (una soluzione ammissibile di un problema di PL in forma standard è un vertice del poliedro delle soluzioni ammissibili se e solo se è una soluzione base ammissibile)

Dimostriamo prima l’implicazione x SBA→ x vertice. Supponiamo per assurdo che una soluzione x ϵ P sia una SBA e non un vertice P. Senza perdita di generalità possiamo raggruppare le componenti positive di x e quelle nulle, ovvero assumiamo: x=[x1,…,xK,0,…,0]T *positive* dove k rappresenta il numero di componenti non nulle(cioè positive) di x. Ne consegue che le colonne A1,…,Ak devono fare parte di una qualsiasi base B associata alla SBA x, insieme eventualmente ad altre colonne(SOLUZIONE DEGENERE).

-Se x non è un vertice di P, esistono due punti : y=[y1,…,yK,0,…0]T ϵ P ; z=[z1,…,zK,0,…0]T ϵ P con y≠z, tale che x=λy+(1-λ)z, per un qualche λϵ(0,1).

Si noti che y e z devono necessariamente avere le ultime componenti a zero, altrimenti la loro combinazione convessa non potrebbe dare x. Per ipotesi si ha allora: y ϵ P→Ay=b → A1y1+…+AKyK=b ; z ϵ P→Az=b → A1z1+…+AKzK=b

sottraendo la seconda equazione dalla prima si ottiene (y1-z1)A1+…+(yK-zK)AK=α1A1+…+ αKAK=0 , ove si è posto αi =yi-zi, i=1,…,k. Esistono quindi scalari αi ,…, αK non tutti nulli(dato che y≠z) tale che , , pertanto le colonne A1,…,AK sono linearmente dipendenti, e non possono fare parte di una fase, contraddicendo l’ipotesi x SBA.

Dimostriamo ora l’implicazione x vertice→x SBA.

Per dimostrare l’implicazione è sufficiente che x vertice→x soluzione base. Il fatto che la soluzione base sia anche ammissibile deriva infatti dall’ipotesi x ϵ P. Supponiamo per assurdo che x sia un vertice di P, ma non una soluzione base del sistema Ax=b. Ipotizzando come prima x=[x1,…,xK,0,…,0]T , con x1,…, xK >0, si ha che x ϵ P → Ax=b → A1x1+…+ AKxK=b, le colonne A1 ,…,AK sono linearmente dipendenti, e quindi esistono k coefficienti α1,…, αK non tutti nulli tali che: α1A1+…+ αKAK=0. Sommando la prima equazione e la seconda moltiplicate per ε>0 si ottiene:

A1(α1+ ε α1)+…+AK(αK+ ε αK)=b.

***Definizione direzione estrema****:*

Un vettore d ϵ Rn di norma unitaria(cioè tale che ||d||=1 ) si dice direzione di un poliedro P se u≥0, x ϵ P x+ud ϵ P.

Una direzione d ϵ Rn di un poliedro P si dice direzione estrema di P se non può essere espressa come una combinazione conica stretta di altre due direzioni di P.

***Teorema di Minkowski-Weyl:***

Ogni punto di un poliedro dotato di almeno un vertice si può ottenere come somma di una combinazione convessa dei suoi vertici e di una combinazione conica delle sue direzioni estreme.

Teorema: Dato un PL min{CTx : x ϵ P}, con P poliedro contenente almeno un vertice, se esiste una soluzione ottima del problema, esiste un vertice di P ottimo.

Dimostrazione: Siano x1,…,xK i vertici di P e siano d1,…,dh le sue direzioni estreme. Sia infine z\*=min{CT xi : i=1,…,k}.

Per dimostrare la tesi del teorema basta dimostrare che, dato un qualunque y ϵ P, si ha cTy≥z\*. Dal lemma si ha che cTdi≥0, per i=1,…,h. Devono esistere moltiplicatori u1,…uh≥0 e λ1,…, λK≥0, , tali che y= . Si ha allora cTy=cT .

***Definizione minimo globale****:*

Una soluzione x\* ϵ X si dice punto di minimo globale per f(x), o soluzione ottima, se: f(x\*)≤f(x) x ϵ X. In questo caso f(x\*) si dice minimo globale di f(x) in X. Un punto di minimo globale è stretto se f(x\*)<fx) x ϵ X, x≠x\*.

***Definizione minimo locale:***

Una soluzione ϵ X si dice punto di minimo locale per f(x) se: ϵ>0 : f( )≤f(x) x ϵ X : ||x- ||<ϵ. Un punto di minimo locale è stretto se f(x\*)<f(x) x ϵ X : ||x- ||<ϵ, x≠ .

***Definizione di insieme convesso e funzione convessa:***

L’intersezione di k insiemi convessi X1,…,XK Rn è un insieme convesso. Un insieme X Rn si dice convesso se:

X, λ ϵ [0,1] z=λx+(1-λ)y ϵ X.

Dati un insieme convesso X e una funzione f:x→Rn, si dice che f è una funzione convessa su X se comunque presi due punti x,y ϵ X e uno scalare λ ϵ [0,1] e detto z=λx+(1-λ)y, si ha che: f(z)≤λf(x)+(1-λ)f(y).

***Definizione di Programmazione Convessa:***

Un PM si dice problema di Programmazione convessa se l’insieme ammissibile x è convesso e la funzione obiettivo f(x) è convessa su x. Un punto di minimo locale è anche detto di minimo globale(solo nella programmazione convessa) : Sia un punto di minimo locale, ovvero tale che ε>0 : f( )≤f(x) x ε X: ||x- ||<ε. Sia y ε X una generica soluzione ammissibile. Dalla convessità di x discende il fatto che λ ε [0,1] il punto z=λ +(1-λ)y ε X.

E’ sempre possibile scegliere un valore di x sufficientemente vicino a 1 tale che sia verificata la condizione ||z- ||<ε, il che implica f( )≤f(x), la convessità di f implica: f(z)≤λf( )+(1-λ)f(y). Unita alla precedente: f( )≤λf( )+(1-λ)f(y). Portando λf( ) a primo membro e dividendo per (1-λ) segue la tesi.